

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ-12 FEBRUARIE 2011
CLASA a-XII-a

SUBIECTUL I

a) Să se arate că $\left(\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}(4x^2+1)}, x \in \mathbb{R}.$

b) Calculați $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}(5x^2+1)} dx, x \in \mathbb{R}.$

c) Determinați primitivele funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x(\sin x + \cos x)}{e^{-2x} + \sin^2 x}.$

SUBIECTUL II

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $\int_0^1 f(ax) dx = 0$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}.$

Să se arate că f este funcția nulă.

SUBIECTUL III

Fie $G = \{f: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ continuă și bijectivă}\}.$

a) Să se arate că toate elementele lui G sunt funcții strict monotone ;

b) Arătați că (G, \circ) este grup ;

c) Fie $g \in G$ cu proprietatea că este un element de ordin finit și $g(0) = 0.$ Să se arate că ordinul lui g în G este 1.

SUBIECTUL IV

Fie $A \in M_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $M = \{aA + bI_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$

a) Arătați că $A^2 = 5A - 7I_2;$

b) Arătați că $X, Y \in M, \forall X, Y \in M;$

c) Demonstrați că $(M \setminus \{O_2\}, \cdot)$ este grup de matrice.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.